



يمكن استخدام المحسبة * القلم الأحمر غير مسموح به .

التصريح الأول : < الدالة العكسية > بالتوفيق

$$f \text{ دالة متخاططة معرفة بالتعبير : } f(x) = \frac{3x+1}{3x-6}$$

ولكن المجال : $I = [4, +\infty[$

1° بين أن f معرفة ومتصلة على المجال I .

2° بين أن f دالة تناقصية قطعا على المجال I .

3° استنتج أن f : تقبل دالة عكسية من مجال J نحو I .

4° احسب قيمة $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

5° حدد المجال J وبين أن :

$$(\forall x \in J) \quad f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{3x-3}$$

التصريح الثاني : (مبرنة القيم الوسيطة)

نعتبر في \mathbb{R} المعادلة :

$$\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$$

1° برهن أن المعادلة تقبل على الأقل حلا $\alpha \in]1, 2[$

2° تحقق مما يلي : $\frac{\alpha}{2} + 1 = \frac{2}{\alpha^2}$

3° هل $\alpha \in \mathbb{N}$ ؟ (مع التعليل)

14 pts

2

2

2

2

6

6 pts

3

2

1

دورة I

تمحيص الواجب رقم 1

ثوبج : 2k

2 فك 3

1/3

تدريجاً 1 : ليكن : $f(x) = \frac{3x+1}{3x-6}$ و $I = [4, +\infty[$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 6 \neq 0\}$$

1° / لدينا :

$$= \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

بما أن : $I \subset D_f$ فإن f معرفة على I .

طريقة أخرى : إذا كان $x \in I$ فإن : $x \geq 4$:
 $3x - 6 \geq 3 \times 4 - 6 = 6 > 0$ أي $3x - 6 \neq 0$:
 ومنه $3x - 6 \neq 0$ إذا : f معرفة على I

النتيجة : f دالة جزئية.

إذا f متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

بما أن f معرفة على I فإنها متصلة عليه.

$$f'(x) = \frac{\left| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 3 & -6 \end{array} \right|}{(3x-6)^2} = \frac{(3)(-6) - 3}{(3x-6)^2}$$

$$= \frac{-18 - 3}{(3x-6)^2} < 0$$

إذا : f تناقصية قطعاً على I .

13° / لدينا مما سبق :

f متصلة على المجال I

إذا f تقبل دالة عكسية
 f^{-1} معرفة على المجال :
 f تناقصية قطعاً على المجال I

$$J = f(I) \text{ نحو المجال } I.$$

$$\alpha = f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) : \text{نقطه} \quad : f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \in]4, +\infty[\quad /4^{\circ} \quad \textcircled{2/3}$$

$$\frac{3\alpha+1}{3\alpha-6} = \frac{3}{2} : \text{بديا} \quad f(\alpha) = f\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(3\alpha+1) = 3(3\alpha-6)$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha+2 = 9\alpha-18 \Leftrightarrow -3\alpha = -20 \Leftrightarrow \alpha = \frac{20}{3}$$

$$\boxed{f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{20}{3}} \quad : \text{نقطه}$$

$$J = f(I) = f([4, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f; f(4) \right] \quad /5^{\circ}$$

$$= \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x} ; \frac{3 \times 4 + 1}{3 \times 4 - 6} \right] = \left] 1; \frac{13}{6} \right]$$

$$I = [4, +\infty[\quad \text{من } x \quad \text{ليكن} \quad J = \left] 1; \frac{13}{6} \right] \quad \text{لدينا:}$$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y+1}{3y-6} = x \Leftrightarrow 3y+1 = 3xy-6x$$

$$\Leftrightarrow 3y - 3xy = -1 - 6x$$

$$\Leftrightarrow y(3-3x) = -1-6x$$

$$y = -\frac{1+6x}{3-3x} \quad : \text{نقطه} \quad 3-3x \neq 0 \quad \text{فان} \quad x > 1 \quad \text{بما ان}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{3x-3} \quad : \text{نقطه}$$

$$(x \in \mathbb{K}) \quad \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$$

1° / الدالة : $f: x \mapsto \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ معرفة على

المجال : $[1; 2]$ وادنياً

$$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1+2-4}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$f(2) = \frac{8}{4} + \frac{4}{2} - 1 = 2+2-1 = 3 > 0$$

إذن : $f(1) \times f(2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية
المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً $\alpha \in]1; 2[$

2° / نعلم أن α حل للمعادلة : $\frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^2}{2} - 1 = 0$ إذن :

$$(\Rightarrow) \quad \frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^2}{2} = 1$$

مضرب الطرفين في $\frac{2}{\alpha^2}$:

$$\frac{2}{\alpha^2} \times \left(\frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^2}{2} \right) = \frac{2}{\alpha^2} \times 1$$

ننشر ثم نبسط :

$$\left| \frac{\alpha}{2} + 1 = \frac{2}{\alpha^2} \right|$$

3° / $\alpha \notin \mathbb{N}$ لأن $\alpha \in]1; 2[$

والمجال $]1; 2[$ لا يحتوي على أعداد صحيحة طبيعية.



الحسبة مسموح بها * القلم الأحمر غير مسموح به

النقطة التمرين 1: [الدالة العكسية] بالتوفيق!

نعتبر الدالة f المعرفة بالتعبير: $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ وليكن المجال: $I = [3; +\infty[$

1° بين أن الدالة f متصلة على المجال I .

2° بين أن f تناقصية قطعا على المجال I

3° استنتج أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو I .

4° قارن العددين: $f^{-1}(2)$ و $f^{-1}(\frac{3}{2})$ دون حسابهما.

5° حدد المجال J وبين أن:

$$(\forall x \in J) \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

التمرين 2: [مبرهنة القيعر الوسطية]

نعتبر المعادلة: $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$

1° برهن أن المعادلة تقبل على الأقل حلا: $\alpha \in]0; 2[$

2° تحقق أن: $\alpha \in]1; 2[$

3° بين العلاقة: $\beta^3 + 2\beta^2 - 1 = 0$ حيث: $\beta = \frac{\alpha}{2}$

تمهيد الواجب المحروك رقم 1 / 2 فذ 2 / فوج : 2k

1/3

شريف : $I = [3, +\infty[$; $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

1° / f دالة جارية ، ان f متصلة على كل مجال م
مجموعة تعريفها D_f . لدينا :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$=]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

و بما أن : $I \subset]2, +\infty[$ ، ان f متصلة على I

2° / لكل x م I (دنيا) :

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2} = \frac{-2 - (-1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

ان f تناقصية قطعا على المجال I .

3° / من خلال ما سبق نعلم أن :

f متصلة على I ان f تقبل دالة عكسية f^{-1}
 f تزايدية قطعا على I معرفة على المجال $J = f(I)$ هو I .

4° / لدينا : $\frac{3}{2} < 2$ و f^{-1} تناقصية ان : $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) > f^{-1}(2)$

تذكير : f و f^{-1} لهما نفس التناوب .

5° $J = f(I) = f([3, +\infty[) =]\lim_{+\infty} f ; f(3)]$

$$J =]1 ; 2]$$

حساب $f^{-1}(x)$: ليكن x من $J =]1, 2]$ و y من I

2/3

لدينا: $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$\Leftrightarrow \frac{y-1}{y-2} = x \Leftrightarrow y-1 = xy-2x$

$\Leftrightarrow y - xy = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow y(1-x) = 1-2x$

بما أن $x \in]1, 2]$ فإن $1-x \neq 0$

لذا: $y = \frac{1-2x}{1-x} = \frac{2x-1}{x-1}$

لذلك $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ لكل x من J .

$\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$

تمرين 1

الدالة $f : x \mapsto \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - 1$ مسألة

على المجال $[0, 2]$ ولدينا:

$f(0) = -1$ و $f(2) = \frac{8}{8} + \frac{4}{2} - 1 = 2$

اذن $f(0) \times f(2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية

المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha \in]0, 2[$.

التحقق: $f(2) = 2 > 0$ لدينا: $f(2) = 2 > 0$

و $f(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} < 0$ لذا $f(1) \times f(2) < 0$

ومنه: $1 < \alpha < 2$

$$\alpha = 2\beta \quad : \text{اذن} \quad \beta = \frac{\alpha}{2} \quad : \text{نضع} \quad 1/3$$

3/3

وبناءً على ذلك حل للمعادلة: $f(x) = 0$

$$\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^2}{2} - 1 = 0 \quad \text{فإن}$$

$$\frac{(2\beta)^3}{8} + \frac{(2\beta)^2}{2} - 1 = 0 \quad \text{نحولها}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\beta^3}{8} + \frac{4\beta^2}{2} - 1 = 0$$

— * fin * —
 $\beta^3 + 2\beta^2 - 1 = 0$
 : اذن

سؤال إضافي : ماذا نستنتج مما سبق (سؤال 13)

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}; 1[\quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in]1, 2[\quad : \text{اذا}$$

$$\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0 \quad \text{حل للمعادلة} \quad \alpha \in]1, 2[$$

اذن :
 يوجد $\beta \in]\frac{1}{2}; 1[$ حل للمعادلة :
 $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$
 *